Adrian Zanoschi
Gabriel Popa
Gheorghe Iurea
Petru Răducanu
Ioan Șerdean

Bacalaureat 2021
Matematică
M_mate-info

Teme recapitulative
60 de teste, după modelul M.E.C.
Breviar teoretic

Editura Paralela 45

Cuprins

Clasa a XII-a

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. Calculați:

a) $2 \cdot (-3) - (-4) : 2 + (-25) : (-5)$; b) $2^{20} : 2^{18} - 3^{20} : 3^{19} + 5^0$;

c) $30 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0,3 + \frac{1}{15}\right)$; d) $8 \cdot [0,(3) + 0,1(6)]$.

2. Fie $0,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{7}$. Calculați: $a_{2018} + a_{2019} + a_{2020}$.

3. Se consideră intervalele $A = (-4, 4]$ și $B = (-2, 7)$. Determinați mulțimea: $(A \cap B) \cap \mathbb{Z}$.

4. Ordonați crescător numerele $a = 2,5(1)$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 2,(51)$, $d = 2,51$.

5. Calculați:

a) $\sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{125}$; b) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$;

c) $\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{2} + 1\right)^2$; d) $\frac{3}{\sqrt{7} + 2} + \frac{2}{\sqrt{7} + 3}$.

6. Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{168} + 4\sqrt{\frac{21}{2}} - 6\sqrt{\frac{14}{3}}\right)\left(\sqrt{4\frac{2}{3}}\right)^{-1}$ este natural.

7. Arătați că numărul $b = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{9}}$ este natural.

8. Se consideră numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ și $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

9. Determinați numerele raționale a și b, știind că $\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 = a - b\sqrt{3}$.

10. Demonstrați că, dacă $x \in [0, 51]$, atunci numărul $a = \sqrt{x+49} + \sqrt{x+625}$ se află în intervalul $[32, 36]$.

11. Fie $E(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 6y + 10}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că $E(x, y) \geq 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

12. Aflați câte numere iraționale conține mulțimea $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{199}, \sqrt{200}\}$.

13. Determinați partea întreagă și partea fracționară pentru fiecare dintre următoarele numere: $a = 2{,}7$, $b = -0{,}6$, $c = 13$, $d = -\sqrt{3}$.

14. Calculați:

a) $\left[\frac{5}{3}\right] + \left[-\frac{5}{2}\right]$;
b) $\{1{,}64\} - \{-2{,}36\}$;
c) $\left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \left[\sqrt{2} + \sqrt{3}\right]$;
d) $\left\{\sqrt{2}\right\} + \left\{\sqrt{3}\right\} - \left\{\sqrt{2} + \sqrt{3}\right\}$.

15. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $[x] + [x + 1] + [x + 2] = 24$;
b) $[x + 1] = 2x - 1$;
c) $\{2x\} = 0$;
d) $\{x\} = \frac{1}{3}$.

16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x - 2| = 5$;
b) $|x - 1| + |2 - 2x| = 12$;
c) $|1 - 2x| = |x + 4|$;
d) $|x^2 - 1| + |x + 1| = 0$.

17. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $|1 - 2x| \leq 3$;
b) $|x + 3| \geq 4$.

18. Determinați numărul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x + 1| \leq 100\}$.

19. Arătați că valoarea expresiei $E(x) = |4x - 8| - 2|4 - 2x|$ nu depinde de numărul real x.

20. Demonstrați că $|2x - 3| + 2|x - 1| \geq 1$, pentru orice număr real x.

21. Demonstrați că $x^2 + 3x + 3 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

22. Demonstrați că, dacă $x, y \in [2, \infty)$, atunci $xy - 2x - 2y + 6 \in [2, \infty)$.

23. Demonstrați că, dacă $x, y \in (-1, 1)$, atunci $\frac{x + y}{1 + xy} \in (-1, 1)$.

24. Fie $E(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, unde $x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) $E(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;

b) $E(x) > \frac{3}{4}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

25. Demonstraţi că:

a) $x + \frac{1}{x} \geq 2$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$;

b) $x + \frac{1}{x} \leq -2$, oricare ar fi $x \in (-\infty, 0)$;

c) $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

26. Demonstraţi, prin inducţie, că următoarele egalităţi sunt adevărate pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$;

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

c) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$;

d) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

27. Demonstraţi, prin inducţie, că următoarele inegalităţi sunt adevărate pentru orice număr natural n care îndeplineşte condiţia indicată:

a) $2^n > 2n + 1$, $n \geq 3$;

b) $n! > 2^n$, $n \geq 4$;

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n \geq 1$;

d) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $n \geq 2$.

28. Demonstraţi că numărul $13^n + 7^n - 2$ se divide cu 6, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

29. Demonstraţi că $7 \cdot 25^n + 2 \cdot 6^{n+1}$ se divide cu 19, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

30. Aflaţi câte numere naturale de trei cifre au suma cifrelor egală cu 25.

31. Aflaţi câte numere naturale de trei cifre au produsul cifrelor egal cu 0.

32. Determinaţi câte numere naturale de patru cifre se pot forma utilizând cifrele 0, 1, 2, 3.

33. Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma utilizând cifrele 1, 2, 3, 4, 5.

34. Aflaţi câte numere de trei cifre au exact două cifre egale.

35. Determinaţi câte numere de patru cifre distincte au produsul cifrelor egal cu un număr impar.

36. Stabiliţi în câte moduri se poate îmbrăca Dan pentru un meci de tenis, ştiind că el are 5 tricouri, 4 perechi de pantaloni scurţi şi 3 perechi de pantofi de sport.

37. Numărul de înmatriculare al unui automobil dintr-un județ este format din două cifre (nu este permisă combinația 00) și din trei litere ale alfabetului latin (26 de litere). Aflați numărul maxim de mașini care pot fi înmatriculate într-un județ.

38. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Aflați câte perechi $(a, b) \in A \times A$ au proprietatea că produsul $a \cdot b$ este impar.

39. Determinați câte numere naturale, mai mici decât 101, sunt divizibile cu 3 sau cu 5.

40. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 199, 200\}$.

a) Aflați câte dintre elementele mulțimii A se divid cu 6 și cu 8.

b) Aflați câte dintre elementele mulțimii A se divid cu 6, dar nu se divid cu 8.

c) Determinați câte dintre elementele mulțimii A se divid cu 6 sau cu 8.

1.2. Șiruri. Progresii

1. Completați cu câte trei termeni următoarele șiruri, apoi scrieți termenul general al fiecăruia:

a) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$;
b) $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$;
c) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$;
d) $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$.

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.

a) Există vreun termen al șirului egal cu $\dfrac{2}{3}$?

b) Câți termeni ai șirului sunt mai mici decât 0,7?

c) Câți termeni ai șirului sunt în intervalul $(0{,}99;\ 1)$?

3. Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq \mathbb{N}}$, de termen general $a_n = \dfrac{4n}{n+3}$, este crescător.

4. Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq \mathbb{N}^*}$, de termen general $a_n = n^2 - n$, este strict monoton.

5. Fie $E(x) = x^2 - 4x + 3$, unde $x \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, definim șirul $(a_n)_{n \geq 4}$ prin:

$$a_n = \frac{1}{E(4)} + \frac{1}{E(5)} + \ldots + \frac{1}{E(n)}.$$

a) Demonstrați că șirul este strict crescător.

b) Demonstrați că șirul este mărginit.

c) Arătați că $a_n = \dfrac{(n-3)(3n-4)}{4(n-1)(n-2)}$, pentru orice $n \geq 4$.

6. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Verificați dacă $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dacă $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, arătaţi că $s_n = \sqrt{n+1} - 1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător şi mărginit.

7. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir cu proprietatea că, dacă $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $s_n = \dfrac{n}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi termenul general a_n.

8. Şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este definit recurent prin $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, oricare ar fi $n \geq 3$. Demonstraţi că $a_n = n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_1 = 4$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi a_3, a_4, a_5, a_6.

b) Arătaţi că $a_n = a_{n+6}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculaţi suma $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2004}$.

***

10. Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice a_1, a_2, 13, 17, 21, … .

11. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică de raţie 2, în care $a_3 + a_4 = 8$. Determinaţi a_1.

12. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, astfel încât $a_3 = 5$ şi $a_5 = 9$. Calculaţi suma primilor şapte termeni ai progresiei.

13. Stabiliţi dacă numărul 2007 aparţine progresiei aritmetice 2, 7, 12, 17, … .

14. Determinaţi numărul real x, ştiind că numerele 2, x şi $x + 4$ sunt în progresie aritmetică.

15. Calculaţi suma $1 + 4 + 7 + \ldots + 31$.

16. Determinaţi numărul natural n din egalitatea $1 + 5 + 9 + \ldots + n = 231$.

17. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 3n - 2$ este o progresie aritmetică. Determinaţi n, dacă $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 51$.

18. Calculaţi suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă: $a_4 - a_2 = 4$ şi $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$.

19. Găsiţi suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă: $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

20*. La un stadion cu capacitatea de 10000 de locuri vin spectatorii. În primul minut vine un spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, în al treilea minut vin 5 spectatori etc. După câte minute se umple stadionul?

21*. Se consideră mulţimea $M = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Câte progresii aritmetice de trei elemente, cu raţia pozitivă, se pot forma cu elementele lui M?

22. Determinaţi numărul real pozitiv x, ştiind că x, 6 şi $x - 5$ sunt în progresie geometrică.

23. Determinaţi primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi b_1, 6, b_3, 24, … .

24. Ştiind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3 = 2$ şi $b_5 = 4$, determinaţi b_7.

25. Calculaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, cu termeni pozitivi, dacă $b_1 + b_2 = 3$ şi $b_3 + b_4 = 12$.

26. Determinaţi primul termen şi raţia unei progresii geometrice, dacă $a_1 + a_4 = \frac{7}{16}$, iar $a_1 - a_2 + a_3 = \frac{7}{8}$.

27. Numerele reale pozitive a, b, c, d sunt în progresie geometrică. Dacă $d - a = 7$ şi $c - b = 2$, aflaţi raţia progresiei.

28*. Fie a, b, c numere naturale nenule în progresie geometrică. Dacă $a + b + c$ este număr par, arătaţi că numerele a, b, c sunt pare.

29. Se consideră numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2008}}$. Demonstraţi că $s \in (1, 2)$.

30. Arătaţi că $2(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^8) < 3^9$.

31. Calculaţi $s = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots + 2^{100}$.

32. Se consideră o progresie geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$, cu raţia $q = 2$. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care $b_n = 96$, iar suma primilor n termeni ai progresiei este 189.

33. Arătaţi că şirul $(b_n)_{n \geq 1}$, $b_n = 6 \cdot 2^{n-2}$, $n \geq 1$ este o progresie geometrică. Determinaţi n dacă $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 93$.

34. Determinaţi numerele reale a, b, dacă numerele 2, a, b sunt în progresie geometrică, iar numerele 2, 4, a sunt în progresie aritmetică.

1.3. Funcții. Funcția liniară

1. Determinaţi domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, unde:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$; b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$; c) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$.

2. Se consideră funcţiile $f : \{-1, 0, a\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = (-1)^x$ şi $g : \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2\} \to A$, $g(x) = \begin{cases} -1, & x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases}$. Determinaţi numerele reale a şi b şi mulţimea A, astfel încât cele două funcţii să fie egale.

3. a) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x - 1$. Calculați produsul $P = f(-9) \cdot f(-8) \cdot ... \cdot f(8) \cdot f(9)$.

b) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 3$. Calculați suma $S = f(1) + f(2) + ... + f(10)$.

c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x}$. Calculați produsul $P = f(1) \cdot f(2) \cdot ... \cdot f(100)$.

4. Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ cu proprietatea:

a) $f(1) = f(3)$; b) $f(1) \neq f(3)$; c) $f(1) = 2f(3)$.

5. Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ pentru care $f(2)$ este impar și $f(1)$ este par.

6. Determinați numărul funcțiilor $f: \{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$ astfel încât $f(1) \cdot f(2) = 0$.

7. a) Arătați că funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ este impară.

b) Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + |x|$ este pară.

c) Determinați numărul funcțiilor impare $f: \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$.

8. Demonstrați că 3 este o perioadă a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left\{\frac{x+1}{3}\right\}$ (unde $\{\cdot\}$ reprezintă partea fracționară).

9. Să se determine numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ care sunt:

a) strict crescătoare; b) strict descrescătoare.

10. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + x^2$. Calculați $(f \circ f \circ f)(1)$.

11. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1$ și $g(x) = x^2 + 1$. Determinați funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$.

12. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ și $g(x) = x^2 - x$. Determinați numerele reale a și b, astfel încât $f \circ g = g \circ f$.

13. Fie funcțiile $f: (0, +\infty) \to (1, +\infty), f(x) = x^2 + 1$ și $g: (1, +\infty) \to (0, +\infty), g(x) = \sqrt{x-1}$. Determinați funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$. Sunt egale funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$?

14*. Se consideră funcțiile: $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2-3x, & x<2 \\ x-1, & x \geq 2 \end{cases}$, iar $g(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 2x-4, & x \geq 0 \end{cases}$. Determinați $f+g, f-g, f \cdot g$ și $f \circ g$.

***

15. a) Se consideră dreapta de ecuație $d: 2x + y - 1 = 0$. Determinați funcția care are ca grafic dreapta d.
b) Există o funcție al cărui grafic să fie dreapta $d': 2x + 1 = 0$? Dar pentru dreapta $d'': 2y + 1 = 0$?

16. Determinați punctele de intersecție cu axele de coordonate ale graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 6$.

17. Determinați funcția de gradul I al cărei grafic trece prin punctul $A(0, -2)$ și pentru care $f(1) = 2$.

18. Arătați că graficul funcției $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (m^2 + 1)x + 2, m \in \mathbb{R}$ nu intersectează axa Ox.

19. Se consideră funcția $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = 4 - x$. Determinați $\operatorname{Im} f$, în cazurile:

a) $D = \mathbb{R}$; b) $D = (0, +\infty)$; c) $D = [-3, 5]$.

20. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \max(2x + 1, x - 1)$. Calculați $f\left(\sqrt{2} - 2\right) + f\left(-\sqrt{2} - 1\right)$.

21*. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{a^2}{2}x + a, a \neq 0$. Dacă A și B sunt punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate, arătați că $AB \geq 2$, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$.

22*. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - 2m + 2$. Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât graficul funcției să nu intersecteze axa Ox.

23. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - 2x$ și $g(x) = 4x - 1$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

24. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$. Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a, 2)$ se află pe graficul funcției f.

25. Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m - 2)x - 3$ să fie strict monotonă.

26. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1, \; g(x) = -2x + 1$. Arătați că funcția $f \circ g$ este strict descrescătoare.

27. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de gradul I, strict descrescătoare, pentru care $(f \circ f)(x) = 9x + 1$, oricare ar fi numărul real x.